Les racines n^{ième} de Z' sont $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n}-\frac{2\pi}{3n})}$

Les racines n^{ième} de Z'' sont $z'_k = e^{i(-\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{3n})}$ avec $k \in \{0,1,2,\cdots\cdots,n-1\}$.

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0 \quad ; \quad z \neq 1 \; ; \; z \neq -1$

On pose $Z = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow$ l'équation devient :

$Z^n + \frac{1}{Z^n} + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^{2n} + Z^n + 1 = 0$

d'où $Z_k = e^{i\theta_k}$ ou $Z_k = e^{-i\theta_k}$

avec $\theta_k = \frac{2k\pi}{n} - \frac{2\pi}{3n}$ / $0 \leq k \leq n-1$

$\frac{1+z}{1-z} = Z \Leftrightarrow 1+z = Z - zZ \Leftrightarrow z(1+Z) = Z-1 \Leftrightarrow z = \frac{Z-1}{Z+1}$

$z_k = \frac{Z_k - 1}{Z_k + 1} = \frac{e^{i\theta_k}-1}{e^{i\theta_k}+1} = \frac{2i\sin(\frac{\theta_k}{2})e^{i\frac{\theta_k}{2}}}{2\cos(\frac{\theta_k}{2})e^{i\frac{\theta_k}{2}}}$

$z_k = i\,\mathrm{tg}(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{3n})$ avec $0 \leq k \leq n-1$

Solution 21 :

1°/ a) $\Delta = 4(1+\cos 2t)^2 - 8(1+\cos 2t) = 4(1+\cos 2t)(1+\cos 2t - 2)$

$= 4(\cos^2 2t - 1) = -4\sin^2 2t = (2i\sin 2t)^2$

d'où $z' = \frac{2((1+\cos 2t)+2i\sin 2t}{2} = 1+\cos 2t + i\sin 2t$

$z'' = 1+\cos 2t - i\sin 2t$

$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\sin 2t > 0$ d'où $z_1 = 1+\cos 2t + i\sin 2t$

et $z_2 = 1+\cos 2t - i\sin 2t$.

b) $z_1 = 1+\cos 2t + i\sin 2t = 1 + (2\cos^2 t - 1) + i2\sin t\cos t$

$= 2\cos t(\cos t + i\sin t)$. Or $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\cos t > 0$ d'ou $z_1 = [2\cos t, t]$